Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIII,** 10.

DIE PRIMZAHLEN IN DER THEORIE DER ELLIPTISCHEN MODULFUNKTIONEN

VON

E. HECKE

KØBENHAVN
LEVIN & MUNKSGAARD
EJNAR MUNKSGAARD
1935

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

In der Theorie der elliptischen Modulfunktionen sind die Elemente, aus denen man durch Quotientenbildung alle Funktionen herstellen kann, bekanntlich die sog. ganzen Modulformen. Das sind Funktionen der komplexen Variabeln τ, welche sich bei den Substitutionen der Modulgruppe ähnlich wie die Eisensteinschen Reihen g_2, g_3 aus der Weierstrasschen Theorie verhalten:

$$F\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k F(\tau),$$

wenn a, b, c, d ganze Zahlen mit Determinante 1 sind. Die Zahl $-k$ heisst die Dimension von F. Bei homogener Schreibweise erhält man in

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-k} F\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$$

eine homogene Funktion von ω_1, ω_2, welche sich bei homogenen Modulsubstitutionen absolut invariant verhält. k ist im allgemeinen eine positive ganze Zahl; jedoch ist man genötigt, von den Thetafunktionen her auch halbzahlige Dimensionen zuzulassen, wo alsdann aber durch die Mehrdeutigkeit der Quadratwurzel $\sqrt{c\tau+d}$ gewisse Schwierigkeiten auftreten. Die Modulform heisst ganz, wenn sie im Innern der oberen Halbebene regulär ist, und dort eine Fourier-Entwicklung

$$F(\tau) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad \left(z = e^{2\pi i \tau}\right)$$

hat. Ist $c_0 = 0$, so nennt man die Funktion $F(\tau)$ im Punkte $\tau = \infty$ (und in den rationalen Punkten τ) verschwindend.

Mit entsprechender Modifikation übertragen sich diese Begriffe auf den Fall, dass man die Invarianz nicht bei der vollen Modulgruppe, sondern nur bei Untergruppen verlangt, wo die Koeffizienten a, b, c, d Kongruenzbedingungen nach einem festen Modul q genügen. Man spricht dann von Formen der »Stufe q«.

Die Formen gegebener Dimension und Stufe bilden eine lineare Schar mit endlich vielen Erzeugenden. Für die Stufe 1, d. h. die volle Modulgruppe, haben wir einen genauen Ueberblick. Es gibt solche Formen nur von gerader Dimension $-k$ und $k \geqq 4$; und sie lassen sich alle als Polynome in den beiden Grundformen g_2, g_3 mit konstanten Koeffizienten darstellen. Einen besseren Ueberblick gewinnt man durch Einführung der allgemeinen Eisenstein-Reihen

$$G_k(\tau) = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m\tau + n)^k}.$$

Hier durchläuft m, n alle ganzen Zahlenpaare ausser (0,0). Die Reihen sind für $k \geqq 4$ absolut konvergent, woraus sogleich die Invarianzeigenschaft folgt. G_4, G_6 sind bis auf Zahlfaktoren mit g_2, g_3 identisch.

Für $k < 12$ gibt es keine bei $\tau = \infty$ verschwindende Modulform der Dimension $-k$. Für $k = 12$ tritt die Diskriminante Δ auf, eine Form der Dimension -12

$$\Delta(\tau) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{24},$$

welche bei $\tau = \infty$ in erster Ordnung verschwindet. Und dann ergibt sich eine eindeutige Normaldarstellung aller ganzen Modulformen der Dimension $-k$ in folgender Gestalt:

$$F(\tau) = x_0 G_k + x_1 \Delta G_{k-12} + \ldots = \sum_{n=0}^{\frac{k}{12}} x_n \Delta^n G_{k-12n}$$

$$(G_2 = 0, G_0 = 1 \text{ gesetzt})$$

mit von τ unabhängigen x_n, wobei n die ganzen Zahlen $\geqq 0$ durchläuft, wofür $k - 12n \geqq 0$. Die Anzahl der linear unabhängigen ganzen Formen der Dimension $-k$ ist danach elementar zu berechnen. Auch für höhere Stufen q ist bei $k \geqq 2$ diese Anzahl bekannt. Dabei tritt das Geschlecht der betreffenden Untergruppe $\Gamma(q)$ auf. Die Aufstellung aller Formen durch Angabe analytischer Ausdrücke ist aber bei höheren Stufen bisher noch nicht gelungen, ausser für einige kleinere Werte von q. Einige Formen gewinnt man aus den Eisenstein-Reihen G_k (durch Hinzufügung von Kongruenzbedingungen für die Summationsbuchstaben m, n). Einige weitere Formen gewinnt man aus Thetas. Ist nämlich $Q(x_1, \ldots x_{2k})$ eine positiv definite quadratische Form von $2k$ Variabeln mit ganzen rationalen Koeffizienten, so stellt die $2k$-fache Thetareihe

$$\sum_{n_1, \ldots n_{2k}} e^{2\pi i \tau Q(n_1, \ldots n_{2k})}$$

eine ganze Modulform der Dimension $-k$ dar von einer Stufe, welche mit der Determinante von Q zusammenhängt.

Wenn man sich nun allgemein für die Reihenentwicklungen nach z interessiert, so findet man zunächst für die G_k ein einfaches Koeffizientengesetz:

$$G_k(\tau) = \alpha_k + \beta_k \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} z^n.$$

Dabei sind α_k, β_k von z unabhängige Grössen (mit rationalem Verhältnis)

$$\alpha_k = 2\zeta(k); \quad c_n^{(k)} = \sum_{d/n} d^{k-1}$$

ist die Summe der $(k-1)$-ten Potenzen der Teiler von n. Die $c_n^{(k)}$ hängen also mit den multiplikativen Eigenschaften von n zusammen, und es liegt nahe, zum Vergleich die Dirichlet-Reihen mit den Koeffizienten c_n^k heranzuziehen. Wir wollen allgemein jeder Modulform der Dimension $-k$ und der Stufe 1

$$F(\tau) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

die Dirichlet-Reihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \quad (s = \sigma + it)$$

(also ohne Rücksicht auf das konstante Glied c_0!) zuordnen. Es gelten dann folgende leicht beweisbare Sätze:

I) $\varphi(s)$ ist absolut konvergent in der Halbebene $\sigma > k$.

II) $\varphi(s)$ ist eine ganze transzendente Funktion, wenn $c_0 = 0$; ist aber $c_0 \neq 0$, so hat $\varphi(s)$ bei $s = k$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum c_0, und $(s-k)\varphi(s)$ ist eine ganze Funktion.

III) $\varphi(s)$ genügt folgender Funktionalgleichung: Setzt man

$$R(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s),$$

so ist

$$R(s) = (-1)^{\frac{k}{2}} R(k-s).$$

IV) $(s-k)\varphi(s)$ hat endliches Geschlecht.

Aber auch umgekehrt zeigt sich durch die bekannte Mellinsche Formel: Ist $\varphi(s)$ eine Dirichlet-Reihe mit den Eigenschaften I)—IV) so ist die zugehörige Potenzreihe $F(\tau)$ (mit c_0 als Residuum von $\varphi(s)$ bei $s = k$) eine ganze Modulform der Dimension $-k$. Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen dieser Funktionalgleichung ist also endlich und gleich der Anzahl der ganzen Modulformen der Dimension $-k$.

Aehnliche Sätze gelten für höhere Stufen; nur muss man dann im allgemeinen *Systeme* von endlich vielen Funktionen $\varphi(s)$ betrachten, die einem *System* von Funktionalgleichungen genügen. Nimmt man für $F(\tau)$ die einfachste Thetareihe $\vartheta_{00}(\tau)$, so kommt für $\varphi(s)$ bei passender Normierung bekanntlich das Riemannsche $\zeta(2s)$ heraus. Von hier aus sieht man, in welcher Richtung geeignete Verallgemeinerungen des bekannten Hamburgerschen Satzes über die Bestimmung von $\zeta(s)$ aus der Funktionalgleichung liegen.

Nun zeigen die bisher bekannten Beispiele, dass bei niederen Werten von k und der Stufe q fast alle Modulformen ein Koeffizientengesetz haben, das mit den multiplikativen Eigenschaften von n zusammenhängt. Genauer gesagt: Die linearen Formenscharen lassen sich durch Formen mit einem Koeffizientengesetz erzeugen, welches sich besonders einfach für die zugehörigen Dirichlet-Reihen ausspricht. Diese Dirichlet-Reihen besitzen nämlich eine Eulersche Produktentwichlung von der Gestalt

$$\varphi(s) = \prod_p (1 - c_p p^{-s} + a_p p^{-2s})^{-1}.$$

Das Produkt ist über alle Primzahlen p zu erstrecken, c_p und a_p sind nur von p abhängig. Das trifft zunächst für die G_k zu, wo $c_p = 1 + p^{k-1}$ $a_p = p^{k-1}$. Ferner für die Dimension -1, wo man binäre Thetareihen hat; die Dirichlet-Reihen sind die Zetafunktionen gewisser imaginärquadratischer Körper, gebildet mit Klassencharakteren und Restcharakteren, für andere Dimension kommen solche Zetafunktionen mit Grössencharakteren hinzu. Für die Dimension

$-\frac{1}{2}$ kommt $\zeta(2s)$ bzw. die Funktion $L(2s, \chi)$ mit Charakteren nach der Stufe als Modul heraus; ähnliches gilt auch für die besonders wichtigen Wurzeln $\sqrt[n]{\Delta(\tau)}$, mit $n = 2$, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Dies ist vorläufig eine sehr unvollständige Menge von Tatsachen ohne erkennbaren Zusammenhang.

Es zeigt sich jedoch, dass hier eine allgemeine Gesetzmässigkeit vorliegt, welche einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen Primzahlen und den Modulfunktionen herstellt. Im einfachsten und bisher wichtigsten Falle zeigt dieser sich in der Möglichkeit der Reduktion des Riemannschen $\zeta(2s)$ auf die Thetareihe. Es geht daraus hervor, dass die elliptischen Modulfunktionen in einer besonders zugänglichen Art den Zusammenhang zwischen additiven und multiplikativen Eigenschaften der natürlichen Zahlen vermitteln.

Das Hilfsmittel der Untersuchung ist ein linearer Funktionalprozess, der aus der klassischen Theorie wohlbekannt ist (Transformationstheorie, Hurwitzsche Theorie der Modularkorrespondenzen), der aber in dieser Richtung noch nicht untersucht wurde. *Ich gebe im Folgenden für den einfachsten Fall der ganzen Modulformen ganzer Dimension $-k$ und Stufe 1 einen Ueberblick über die Methoden und Resultate.*

Es sei also k eine gerade Zahl $\geqq 4$, und $\varkappa = \left[\frac{k}{12}\right]$ bezw. $\varkappa = 1 + \left[\frac{k}{12}\right]$ sei die Anzahl der linear unabhängigen ganzen Modulformen der Dimension $-k$; $F^{(\varrho)}(\tau)$, $\varrho = 1, \ldots \varkappa$ sei ein volles System solcher Formen. Für jede natürliche Zahl n ist dann bekanntlich $F^{(\varrho)}(n\tau)$ ebenfalls eine ganze Modulform, die aber nicht zur vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$ gehört, sondern zu der Untergruppe $\Gamma_0(n)$ mit $c \equiv 0 \pmod{n}$.

Aehnliches gilt für $F^{(\varrho)}\left(\frac{A\tau+B}{C\tau+D}\right)$, wenn A, B, C, D irgendwelche ganzen Zahlen mit Determinante n sind. Diese Transformationen der Ordnung n zerfallen bekanntlich in endlich viele Klassen nach $\Gamma(1)$. Elemente derselben Klasse unterscheiden sich nur um einen vorderen Faktor aus $\Gamma(1)$, heissen äquivalent nach $\Gamma(1)$; verschiedene Klassen enthalten nie äquivalente Elemente. Jede symmetrische Verbindung der homogen geschriebenen $F^{(\varrho)}\big(L(\omega_1, \omega_2)\big)$, wo L die verschiedenen Klassen durchläuft, z. B. die Summe, bleibt bei $\Gamma(1)$ invariant. Als Repräsentanten der Klassen kann man wählen

$$L = \begin{pmatrix} a\, b \\ 0\, d \end{pmatrix}, \quad ad = n; \quad b \operatorname{mod.} d, \quad d > 0.$$

(Es ist zweckmässig, hierbei auch Systeme a, b, c, d, mitzurechnen, welche einen gemeinsamen Teiler > 1 haben). Somit ergibt sich schliesslich: Bei jeder Modulform F werde gesetzt für eine natürliche Zahl n

$$(1) \qquad T_n(F) = n^{k-1} \sum_{a,\, b,\, d} F\left(\frac{a\tau+b}{d}\right) d^{-k}.$$

Dann ist $T_n(F)$ wieder eine ganze Modulform der Dimension $-k$, wenn F eine solche ist. Der lineare Operator T_n führt also die lineare Schar der $F^{(\varrho)}(\tau)$ in sich über, es gibt also $\varkappa^2$ von τ unabhängige Grössen $\lambda_{\varrho\sigma}(n)$, sodass

$$T_n(F^{(\varrho)}(\tau)) = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \lambda_{\varrho\sigma}(n)\, F^{(\sigma)}(\tau).$$

Die quadratische Matrix $\lambda(n)$ mit den Elementen $\lambda_{\varrho\sigma}(n)$ hat nun folgende Eigenschaften:

1) Die Matrizen $\lambda(n)$ für $n = 1, 2, \ldots$ sind untereinander vertauschbar.

2) Es gilt

$$\lambda(n) \cdot \lambda(m) = \sum_{d/m,\, d/n} \lambda\left(\frac{mn}{d^2}\right) d^{k-1} \tag{2}$$

für zwei beliebige natürliche Zahlen m, n. In der Summe durchläuft d die gemeinsamen Teiler von m, n. Insbesondere ist für teilerfremde m, n

$$\lambda(n) \cdot \lambda(m) = \lambda(n \cdot m).$$

3) Geht man von $F^{(\varrho)}(\tau)$ durch eine lineare Substitution A zu einem linear äquivalenten System

$$F^{*(\varrho)}(\tau) = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} a_{\varrho\sigma} F^{(\sigma)}(\tau), \quad A = (a_{\varrho\sigma})$$

über, so sind die zu dem System F^* gehörigen Matrizen

$$\lambda^*(n) = A \cdot \lambda(n) \cdot A^{-1}$$

(dass Produkt ist hierbei wie in (2) als Matrizenprodukt gemeint).

4) Setzt man jetzt für $F^{(\varrho)}(\tau)$ die Potenzentwicklung

$$F^{(\varrho)}(\tau) = a^{(\varrho)}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a^{(\varrho)}(n)\, z^n$$

in $T_n(F^{(\varrho)})$ ein, so erhält man ein System von Gleichungen zwischen $a^{(\varrho)}(n)$ und den $\lambda_{\varrho\sigma}(n)$:

$$\sum_{d/n,\, d/m} a^{(\varrho)}\left(\frac{nm}{d^2}\right) d^{k-1} = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} \lambda_{\varrho\sigma}(n)\, a^{(\sigma)}(m). \qquad \begin{matrix} n \geqq 1 \\ m \geqq 0 \end{matrix} \tag{3}$$

Hieraus folgt unter Benutzung des Umstandes, dass die linke Seite in n, m symmetrisch ist, dass die $\varkappa^2$ Funktionen

$$f_{\varrho\sigma}(\tau) = \lambda_{\varrho\sigma}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{\varrho\sigma}(n)\, z^n, \quad \varrho, \sigma = 1, \ldots \varkappa$$

unter geeigneter Definition der konstanten Matrix $\lambda(0)$ selbst der linearen Schar der $F^{(\varrho)}(\tau)$ angehören und umgekehrt:

$$f_{\varrho\sigma}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} b_{\varrho\sigma}^{\nu} F^{(\nu)}(\tau); \quad F^{(\varrho)}(\tau) = \sum_{\sigma=1}^{\varkappa} f_{\varrho\sigma}^{\nu}(\tau)\, a^{(\sigma)}(1)$$

wo die $b_{\varrho\sigma}^{\nu}$ von τ unabhängig sind. Es ist also zweckmässig, die quadratische Matrix

$$B(\tau) = \left(f_{\varrho\sigma}(\tau)\right) (\varrho, \sigma = 1, \ldots \varkappa)$$

einzuführen, welche sich mit Hilfe der $\varkappa$ konstanten Matrizen

$$B_{\nu} = \left(b_{\varrho\sigma}^{\nu}\right)$$

als

$$B(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} F^{(\nu)}(\tau)\, B_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n)\, e^{2\pi i n \tau}$$

schreiben lässt. $B(\tau)$ ist also eine Zusammenfassung der Schar aller ganzen Modulformen der Dimension $-k$ zu einer Potenzreihe nach z, mit Koeffizienten $\lambda(n)$, die selbst quadratische Matrizen sind, mit dem einfachen Gesetz

$$\lambda(n) \cdot \lambda(m) = \sum_{d/n,\ d/m} \lambda\left(\frac{n \cdot m}{d^2}\right) d^{k-1} \quad n, m \leqq 1.$$

5) Die Matrizen B_{ν} lassen sich als lineare Kombinationen der $\lambda(n)$ mit skalaren Koeffizienten darstellen und umgekehrt:

$$\lambda(n) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} a^{(\nu)}(n)\, B_{\nu}; \quad B_{\nu} = \sum_{n=1}^{\varkappa} x_{\nu}(n)\, \lambda(n).$$

Die B_{ν} definieren daher einen kommutativen Ring von $\varkappa$ linear unabhängigen vertauschbaren Matrizen, dessen Struktur untersucht werden muss.

6) Geht man zu den Dirichlet-Reihen über

$$\varphi_{\varrho\sigma}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\varrho\sigma}(n)}{n^s} \quad (\varrho, \sigma = 1, \ldots \varkappa),$$

so ist die Matrix

$$\Phi(s) = \left(\varphi_{\varrho\sigma}(s)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$$

die der $B(\tau)$ zugeordnete Dirichlet-Reihe. Sie gestattet wegen der Vertauschbarkeit der $\lambda(n)$ auf Grund von (2) die Eulersche Produktdarstellung

$$\text{(4)} \quad \Phi(s) = \prod_p \left(\lambda(1) - \lambda(p)\, p^{-s} + \lambda(1)\, p^{k-1} p^{-2s}\right)^{-1}.$$

Dabei ist $\lambda(1)$ die Einheitsmatrix und p durchläuft alle Primzahlen, der einzelne Faktor des absolut konvergenten Produktes ist die zu der Klammer reziproke Matrix. Daraus geht hervor, dass die Determinante

$$|\Phi(s)| \neq 0 \quad \text{für } \sigma > k.$$

Es hat also $\Phi(s)$ in der Halbebene $\sigma > k$ eine Reziproke, und die Elemente von $\Phi(s)$ sind bis auf den Pol erster Ordnung $s = k$ überall im Endlichen reguläre Funktionen. Die Matrix genügt auch der Funktionalgleichung

$$(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,\Phi(s) = (-1)^{\frac{k}{2}}\,(2\pi)^{s-k}\,\Gamma(k-s)\,\Phi(k-s).$$

Es ist also hier ein genaues Analogon zu $\zeta(s)$ und dem Nullstellenproblem vorhanden.

7) In den $\varkappa^2$ Elementen der Matrizen $B(\tau)$, $\Phi(s)$ finden sich nur je $\varkappa$ linear unabhängige Funktionen von τ oder s; daher erwächst das Problem, eine solche Normalform herzustellen (durch geeignete Wahl der Ausgangsfunktionen $F^{(\varrho)}(\tau)$), in welcher nur $\varkappa$ Bestandteile auftreten. Hier gilt zunächst:

Da die Matrizen $\lambda(n)$ vertauschbar sind, kann man sie bekanntlich simultan durch geeignete Wahl einer festen Matrix A in die Form

$$\lambda^*(n) = A \cdot \lambda(n) \cdot A^{-1}, \quad \lambda^*_{\varrho\sigma}(n) = 0 \quad \text{für } \varrho > \sigma,$$

überführen, wo die $\lambda^*(n)$ unterhalb der Hauptdiagonale lauter Nullen haben. Wir nehmen mit Rücksicht auf 3) an, das Ausgangssystem $F^{(\varrho)}(\tau)$ sei bereits so gewählt, dass die $\lambda(n)$ selbst diese Gestalt haben. Die gleiche Gestalt haben dann auch $\Phi(s)$, $B(\tau)$. Die in der Diagonale stehenden Elemente

$$\varphi_{\varrho\varrho}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\varrho\varrho}(n)}{n^s} \quad (\varrho = 1, \ldots \varkappa)$$

haben nun Koeffizienten, die offenbar wegen der Gestalt der $\lambda(n)$ die Regel

$$\lambda_{\varrho\varrho}(n)\,\lambda_{\varrho\varrho}(m) = \sum_{d/n,\, d/m} \lambda_{\varrho\varrho}\left(\frac{nm}{d^2}\right) d^{k-1} \tag{5}$$

erfüllen. Mithin haben sie eine gewöhnliche Eulerproduktdarstellung

$$\varphi_{\varrho\varrho}(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \lambda_{\varrho\varrho}(p)\,p^{-s} + p^{k-1-2s}}. \tag{6}$$

Das oben erwähnte Nullstellenproblem ist also identisch mit dem Nullstellenproblem der $\varkappa$ Funktionen $\varphi_{\varrho\varrho}(s)$. Von ihnen ist keine identisch 0, und sie sind linear unabhängig, soweit sie verschieden sind. Sind sie wirklich alle verschieden, so haben wir $\varkappa$ linear unabhängige $\varphi_{\varrho\varrho}(s)$ bzw. $\varkappa$ linear unabhängige Modulformen $f_{\varrho\varrho}(\tau)$ mit einem einfachen Koeffizientengesetz; die oberhalb der Diagonale stehenden Elemente sind dann auch von selbst schon 0.

Die Anzahl $\varkappa'$ der verschiedenen Funktionen $\varphi_{\varrho\varrho}(s)$ ist also $\leqq \varkappa$ und $\geqq 1$. Nun ist $\varkappa = 1$ für $4 \leqq k \leqq 10$ und

$k = 14$. Hier ist also $\varkappa' = \varkappa = 1$. Für $k \geqq 12$ ergibt sich weiter allgemein $\varkappa' \geqq 2$, wenn $k \neq 14$.

8) Es ist nämlich das System aller in $\tau = \infty$ verschwindenden Modulformen der Dimension $-k$ gegenüber T_n invariant, wie aus der Definition von T_n sofort folgt. Anderseits zeigt die Rechnung, dass jede Eisenstein-Reihe G_k (die also bei $\tau = \infty$ nicht verschwindet) bei T_n sich bis auf einen konstanten Faktor reproduziert. Das bedeutet, dass die Matrix $B(\tau)$ insofern *voll reduzibel* ist, als sie in eine Matrix mit zwei längs der Diagonale aufgereihten quadratischen »Kästchen« transformiert werden kann aus ein bzw. $(\varkappa - 1)^2$ Elementen, während ausserhalb der Kästchen lauter Nullen stehen. Ob die Reduktion auf reine Diagonalform (ausserhalb der Diagonale lauter Nullen) immer möglich ist, kann ich noch nicht entscheiden. Jedenfalls ist für die Dimensionen $-k$ mit $16 \leqq k \leqq 22$ und $k = 12{,}26$, wo $\varkappa = 2$, die Reduzierbarkeit auf reine Diagonalform bewiesen. Also haben die zu

$$\Delta,\quad \Delta G_4,\quad \Delta G_6,\quad \Delta G_8,\quad \Delta G_{10},\quad \Delta G_{14}$$

gehörigen Dirichlet-Reihen eine Eulersche Produktentwicklung von der Gestalt (6); dieses Resultat ist insbesondere für Δ selbst neu.

Durch eine numerische Rechnung habe ich mich überzeugt, dass auch für $k = 24$, wo $\varkappa = 3$, die Reduktion der zu den drei Formen

$$G_{24},\quad \Delta G_{12},\quad \Delta^2$$

gehörigen Matrix $B(\tau)$ auf reine Diagonalform möglich ist. Es gibt ausser G_{24} noch zwei Verbindungen

$$\Delta G_{12} + \alpha\Delta^2,\quad \Delta G_{12} + \beta\Delta^2,$$

deren Dirichlet-Reihen ein Eulerprodukt sind. Hierzu gehört aber Δ^2 sicher nicht, da hier $c_1 = 0$ ist.

9) Die Frage nach der Reduzibilität oder vollen Reduzibilität von $B(\tau)$ führt also auf die Frage nach den linearen Teilscharen von Modulformen, welche bei den Operationen T_n in sich übergehen, d. h. auf die Eigenfunktionen des Operators T_n, die ja eindeutig bestimmt sind. Auf diese Weise ist zum ersten Male eine charakteristische innere Eigenschaft der Eisenstein-Reihen G_k angebbar, durch welche diese bisher durch Rechenausdrücke eingeführten Formen bestimmt sind: Die G_k sind die bis auf konstanten Faktor eindeutig festgelegten Eigenfunktionen der Operatoren T_n, die bei $\tau = \infty$ nicht verschwinden.

10) Der ganze Ansatz lässt sich nun übertragen auf Formen höherer Stufe q. Es gibt dann zu jedem n nicht nur *einen* Operator T_n, sondern so viel verschiedene, als es mod. q verschiedene Transformationen der Ordnung n gibt. Bei der Untersuchung des Zusammenhanges zwischen den T_n mit gleichen n treten dann naturgemäss die endliche Modulargruppe mod. q und ihre Darstellungen durch lineare Substitutionen auf. Entsprechend sind die Matrizen $\lambda(n)$ alsdann nicht alle vertauschbar, sondern es schieben sich dazwischen die Matrizen der Darstellungen dieser Modulargruppe. Das Schlussergebnis ist aber von einer Form ähnlich wie im Falle $q = 1$. Es hat hier ein besonderes arithmetisches Interesse: denn als invariantes Teilsystem von Formen, das bei den Operationen T_n in sich übergeht, tritt hier das System der durch $2k$-fache Thetareihen darstellbaren Formen einer festen Stufe (Dimension $-k$), auf. Und die oben eingeführten Begriffe erlauben die Entwicklung einer vollständigen Theorie der Darstellung ganzer Zahlen durch definite quadratische Formen von gerader Variabelnzahl. Dass wichtigste Ergebnis ist, dass auch hier die Darstellung der Zahl N durch die quadratischen Formen eines

vollen Systems mit gegebener Determinante völlig bekannt ist, wenn man die Darstellung der Primzahlen $N = p$ beherrscht. Das analytische Spiegelbild dieser Tatsache ist die Existenz des Eulerproduktes für die entsprechende Matrix aus Dirichlet-Reihen. Es herrschen also ähnliche Gesetze, wie sie bei den binären Formen (imaginär-quadratische Körper) lange bekannt sind, und wie sie für einzelne quadratische Formen von mehr als 2 Variabeln schon gelegentlich in der Arithmetik bewiesen wurden. Bei den quadratischen Formen mit ungerader Variabelnzahl liefert der obige Ansatz jedoch viel weniger. Die zugehörigen Thetareihen sind Modulformen halbzahliger Dimension und für diese ist der Operator T_n, soweit ich sehe, nur für Quadratzahlen n zu definieren: auf diese Art kommt nur ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der Darstellungen von N und von $N \times$Quadratzahl heraus.

Eine ausführliche Darstellung der ganzen Theorie wird in den Mathematischen Annalen erscheinen.

Hamburg, 3. Mai 1935.

Forelagt paa Mødet den 10. Maj 1935.
Færdig fra Trykkeriet den 29. Juni 1935.